מועד ב', סמסטר חורף תשע"ט - אלגברה 1/מ, 104016
5.3.19

ת"ז :

פקולטה :

- משך המבחן : 3 שעות.
- השימוש בחומר עזר כלשהו ובמחשבונים אסור בהחלט.
- רישמו את כל תשובותיכם בדפים אלה. אפשר להשתמש בשני צידי הדף.
- **בשאלות 1-3** יש **לנמק** היטב כל תשובה. **תשובה לא מנומקת לא תחשב**.
  בשאלות 4-8 יש לסמן את התשובה הנכונה בטבלה שבעמוד זה. בכל שאלה יש רק סימון אחד נכון. אם תסומן יותר מתשובה אחת השאלה תיפסל.
- **אין לתת נימוקים בשאלות 4-8.**
- שאלת ש"ב (המהווה גם 5% מגן) היא 3-א'.
- סה"כ ניתן לצבור במבחן 101 נקודות אבל הציון הסופי לא יעלה על 100.

ב ה צ ל ח ה !

טבלה לסימון תשובות נכונות בשאלות 4-8

	שאלה 4	שאלה 5	שאלה 6	שאלה 7	שאלה 8
א.					
ב.					
ג.					
ד.					
ה.					

<u>שאלה מס' 1</u> : (25 נקודות)

יהי $\mathbb{R}_2[x]$ מרחב הפולינומים הממשיים ממעלה לכל היותר 2, ויהי $\mathbb{R}^{2\times 2}$ מרחב המטריצות הממשיות מסדר 2×2 מעל $\mathbb{R}$. נגדיר $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ העתקה לינארית ע"י:

$$T(a+bx+cx^2)=\begin{pmatrix} a+2c & 2a+b+3c \\ a-b+3c & 3a+2b+4c \end{pmatrix}$$

א. (6 נק') מצאו בסיס ומימד לגרעין של T.

ב. (6 נק') מצאו בסיס ומימד לתמונה של T.

ג. (7 נק') יהי $W\subset\mathbb{R}^{2\times 2}$ מרחב המטריצות הסימטריות. הוכיחו כי $\mathbb{R}^{2\times 2}=W+\operatorname{Im}T$. האם סכום זה הוא סכום ישר? נמקו.

ד. (6 נק') תהי $S:\mathbb{R}^{2\times 2}\to\mathbb{R}^{2\times 2}$ העתקה לינארית המוגדרת ע"י: $S(A)=A-A^t$. מצאו בסיס ומימד לתמונה של $S\circ T$.

<u>שאלה מס' 2</u> : (20 נקודות)

תהי $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ המטריצה הבאה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix} .$$

א. (5 נק') מצאו את הפולינום האופייני של A, את הערכים העצמיים ואת הריבוי האלגברי והגיאומטרי של כל ערך עצמי.

ב. (7 נק') הוכיחו כי A לכסינה מעל $\mathbb{R}$ ומצאו מטריצה הפיכה P ומטריצה אלכסונית D כך ש $P^{-1}AP = D$.

ג. (4 נק') הוכיחו כי A דומה ל- $A^2 - 2I$.

ד. (4 נק') הוכיחו כי $A^3 \in span\{I, A\}$.

בשאלה זו יש לתת פתרון מלא ובסוף לרכז את התשובות במשבצות המתאימות בסוף השאלה.

א. פולינום אופייני:

ע״ע	ר״א	ר״ג

ב. A לכסינה כי:

D=

P=

<u>שאלה מס' 3</u> : (31 נקודות) **סעיף א' בשאלה זו מהווה שאלת ש"ב.**

בשאלה זו 4 סעיפים. הוכיחו את הטענות הבאות או הפריכו ע"י דוגמא נגדית:

א. (10 נק') יהיו $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ שונות מ- 0 המקיימות $AB = 0$. אם C שקולת שורות ל- A אז קיימת D שונה מ- 0 כך ש $CD = 0$.

ב. (7 נק') יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, ויהי $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ בסיס של V. אם $T: V \to V$ אופרטור לינארי כך ש $\{T(v_1)\ ,\ T(v_2)\}$ בסיס לתמונה של T אז $\{v_3\ ,\ v_4\}$ בסיס לגרעין של T.

ג. (7 נק') קיימת מטריצה A מסדר 3×3 עם מספרים שלמים המקיימת: $A^2=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 5 & 5\\ 2 & 8 & 11\end{pmatrix}$.

ד. (7 נק') לכל מטריצה $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ קיימים אינסוף ערכים ממשיים של α כך שהמטריצה $A-\alpha I$ הפיכה.

<u>יש לסמן את התשובה הנכונה לשאלות 4-8 בטבלה שבדף הראשון. נימוקים לא יבדקו.</u>
<u>יותר מסימון אחד יגרור ניקוד 0 על השאלה.</u>

<u>שאלה מס' 4</u>: (5 נקודות)

יהי $f(x)=x^6+ax^4+bx^3$ פולינום עם מקדמים ממשיים ו- $a,b\neq 0$, אזי:

א. ל- $f(x)$ אין שורשים ממשיים פרט ל- 0.

ב. ל- $f(x)$ יש שורש ממשי חיובי.

ג. אם $2+5i$ הוא שורש של $f(x)$ אז גם 4 הוא שורש של $f(x)$.

ד. אם z הוא שורש לא ממשי של $f(x)$ אז $f'(z)\neq 0$.

ה. ל- $f(x)$ אין שורש מריבוי 2.

<u>שאלה מס' 5</u>: (5 נקודות)

יהיו S_1 , S_2 שתי קבוצות וקטורים לא ריקות ב- $\mathbb{R}^2$. אזי:

א. אם $S_1\neq S_2$ וגם $S_1\cup S_2$ בלתי תלויה ליניארית אז $S_1\cup S_2$ בסיס של $\mathbb{R}^2$.

ב. אם $S_1\cap S_2=\varnothing$ אז $span\{S_1\cup S_2\}=\mathbb{R}^2$.

ג. אם $v\in span\{S_1\}\cap span\{S_2\}$ אזי $v\in S_1\cap S_2$.

ד. אם $S_1\neq S_2$ אזי $span\{S_1\}\cap span\{S_2\}=\{0\}$.

ה. אם $span\{S_1\cup S_2\}=\mathbb{R}^2$ אזי $S_1\cup S_2$ בסיס של $\mathbb{R}^2$.

<u>שאלה מס' 6</u>: (5 נקודות)

נתונה המטריצה: $A=\begin{pmatrix}2a_1 & 3b_1 & -c_1\\ 2a_2 & 3b_2 & -c_2\\ 2a_3 & 3b_3 & -c_3\end{pmatrix}$ ונתון כי $\det(A)=36$.

אז $\det\begin{pmatrix}3a_1 & 3a_2 & 3a_3\\ 2c_1 & 2c_2 & 2c_3\\ -b_1 & -b_2 & -b_3\end{pmatrix}$ שווה ל:

א. 6 ; ב. -6 ; ג. 36 ; ד. -36 ; ה. 20

<u>שאלה מס' 7</u> : (5 נקודות)

תהי A המטריצה הבאה כאשר $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 3 & \alpha & \alpha \\ 1 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

נתון כי $\lambda = 3$ הוא ערך עצמי של A. נסמן ב V_3 את המרחב העצמי של $\lambda = 3$ אזי:

א. $\alpha = 5$, $V_3 = sp\{(1,2,0)\}$.

ב. $\alpha = 1$, $V_3 = sp\{(-5,2,3)\}$.

ג. $\alpha = 5$, $V_3 = sp\{(-10,5,4)\}$.

ד. $\alpha = 1$, $V_3 = sp\{(1,0,3)\}$.

ה. $\alpha = 1$, $V_3 = sp\{(-2,1,4)\}$.

<u>שאלה מס' 8</u> : (5 נקודות)

יהיו $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ שונות מ- 0 , אזי:

א. אם $rank(A) = rank(B)$ אז $rank(A^2) = rank(B^2)$.

ב. אם $rank(AB) = rank(B)$ אז A הפיכה.

ג. אם $AB = BA$ אז A ו- B דומות.

ד. אם AB סימטרית $AB = BA$.

ה. אם $AB = I - B$ אז $A + I$ הפיכה.

דף ריק למקרה הצורך